―≪論　説≫―

アローの不可能性定理の視覚的表現[i]

犬　童　健　良

１．はじめに

社会選択理論は，「社会」や「個人の選好」や「社会全体としての決定」を公理系として抽象化する．これらの対象を論理に基づいて記述し，証明（演繹）によって定理を証明するという数理手法に基づく．また数学あるいは情報科学の一分野である組み合わせ論の社会科学応用という性質を帯びている．

今日，社会選択理論はゲーム理論や最適化理論とともに，経済学，社会学，政治学，政策科学，経営科学など，社会科学の広い範囲で影響を与えている．また近年，コンピュータサイエンスとの関わりを深めている．その最も重要な定理は，個人の考えるランキングを，矛盾なく，グループ全体として一つに集計する問題に対する解，すなわち社会的厚生関数(SWF)の不在を示すものであった．いわゆる，アロー(Kenneth Joseph Arrow)の一般不可能性定理である[1]．

アロー自身による証明の他，さまざまな研究者が，より分かりやすい別証を与えることを試みてきた．しかし，アロー自身による証明には２つのバージョンがあり，後の方(pp. 97-100)はより短く，なおかつさほど難しくない．本論文はむしろそのオリジナルの証明に対し忠実に，その図的表現を提案することを目的とする．

本論文で示す図的証明は以前に筆者のウェブサイトのスライド[2]で示した２人３代替案の場合のものに基づく．証明のロジックとしてはオリジナルの証明[1]の前半部部分と変わらないが，視覚的イメージに訴え，その背後にある規則的な構造を浮き彫りにする．

２．アローの定理：会議スケジューリングの例

本節では会議スケジューリングの例を用いて社会的厚生関数の定義と不可能性定理の意味を直観的に説明する．

例1. ある会議を，可能なタイムスロットからなる代替案（以下，たんに案と呼ぶ）の集合A＝{a，b，c}のいずれかに割り当てたい．ただし，Aの各要素はそれぞれ以下の意味を持つものとする．

a：水曜の朝，

b：木曜の昼，

c：金曜の夕．

会議をどのタイムスロットに割り当てるのがより望ましいかについて，各参加者は選好(preference)を持ち，それが案の集合 A 上のランキングとして表されるものとする．それは以下の６通りの内の１つである．

Σ＝｛abc，acb，bac，bca，cab，cba｝．

会議の主催者は，各人のランキングを問い，それに基づき，最終的に一つのランキングに集約したい，あるいはそのトップランクである案を一つ選びたい．

個人のランキングの組のことをプロフィールと言う．そこで「民主的な会議スケジューラー」は，任意のプロフィールに対して，一つのランキングを出力する．ただし以下の条件をすべて満たすことが要求される．

（条件１）参加者はΣ内のどのランキングも主張できる．

（条件２）集計されたランキングはΣ内のいずれかである．

（条件３）各案のペアに対して全会一致の場合はそれを採用しなければならない．

（条件４）案のペアを比較するときは，そのペアのことだけ考えればいい．

（条件５）結論としてのランキングは，つねに特定の一人のそれと同じであってはいけない．

任意のプロフィールから社会（グループ）全体として一つの社会的順序（やはりランキングの一つ）へ集約することを，選好集計(preference aggregation)あるいは社会的厚生関数(SWF; Social Welfare Function)と言う．以下に述べる命題１は，３代替案以上，任意の人数のＳＷＦに対して成り立つ．

命題１．（アローの一般不可能性定理）条件１～４の下では，つねに独裁者(dictator)が存在する．よって矛盾なく条件１～５を同時に満たすことはできない．

つまり独裁制(dictatorship)が帰結される．各条件の別名や意味について注釈しておこう．条件１は，個人の選好領域の無制限性，あるいは社会的厚生関数の定義域の無制限性である．条件２は値域の推移性，すなわち集計されたランキングの無矛盾性（合理性）である．条件４は全会一致，あるいは（弱）パレート条件と呼ばれる．条件４は独立性，より正確には無関係な代替案の独立性（IIA； Independence of Irrelevant Alternatives）と呼ばれる．条件５は独裁者の不在，つまり非独裁制を求めている．

３．選好集計の図的表現

数学的に言うと，ランキング（ないし順序）とは完備性，反射性，推移性を同時に満たす２項関係のことである．またタイ（無差別，同着）のない場合は非対称性を満たし，線形順序と呼ばれる．本論文では，これ以降，線形順序を仮定する．より正確に言えば，前述の記法で語ｒ＝xyz が意味するのは，R（ｒ）=｛（x,y），(y,z)，(x,z)｝∪｛（Z,Z）｜Z∈A｝という２項関係である．ちなみに文献では，（x,y）∈R を xRy と書くことが多い．

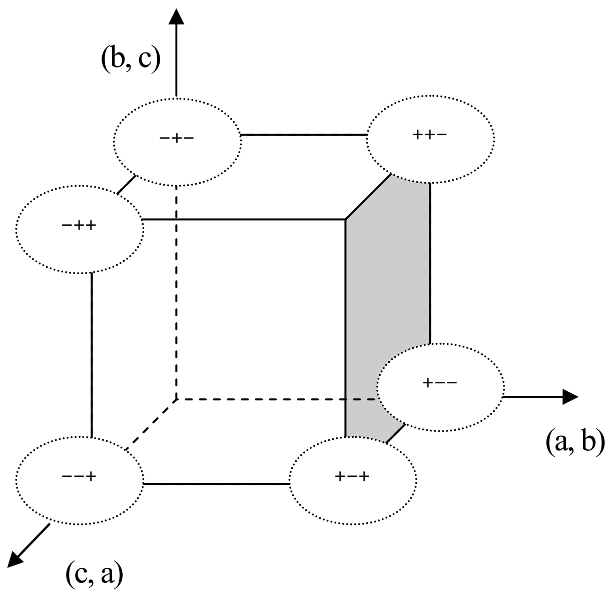

図１．３代替案の線形順序の図的表現

例１の場合，３つの順序付きペア(a，b)，(b，c)，(c，a)についての向き付け（＋または－）によって，集合Σ内の６つのランキングを表現できる．例えば，bac はそれぞれ(a，b)が－，(b，c)が＋，(c，a)が－の向き（符号）であるから，（－＋－）と表される．ただし（＋＋＋）と（－－－）はサイクル（非推移的）であるため，Σ内に対応する要素を持たないことに注意する．またそれを図１のような立方体(cube)の，サイクルの２頂点を除く，６頂点に対応させることができる．

次に命題１の視覚的意味について考えてみよう．まずN人のグループで，各個人の可能なランキングの集合と，それに加えてグループ全体のそれが，それぞれ図１のような立方体の形で描ける．また任意のプロフィールはN個の立方体について，それぞれ一つの頂点が選ばれ，点灯している状態に対応している．命題１によると，それがいかなる選ばれ方であっても，３条件を同時に満たすように集計されたグループ全体の立方体の状態は，ある個人（独裁者）の立方体とつねに同じ状態ということになる．

４．命題１の証明：２人３代替案の場合

再び図１を見ると，６頂点を連結する辺に沿って，系統的に一つのペアの向きを変更(reverse)することによって，ランキングの遷移サイクルが描けることに注意する．命題１は，立方体はN個あっても，集計結果を表すには１個で足りることを教えている．したがって，直観的には，N人のプロフィール（の同値類）を，１個の立方体の頂点に，矛盾なく貼り付けることができるはずであろう．これを命題２とする．

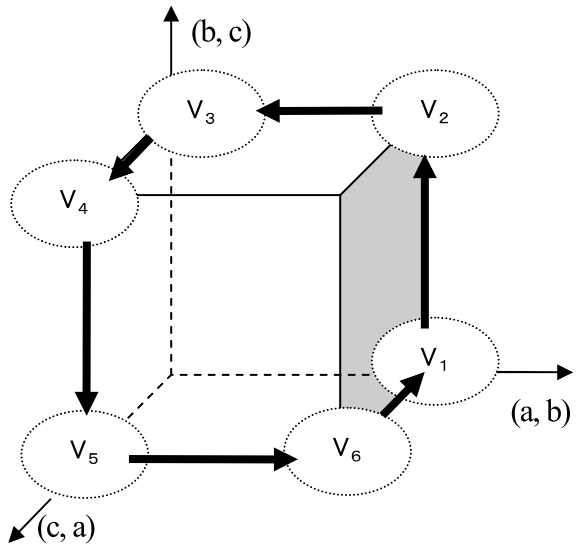

図２．集合Ｖのプロフィールをランキング遷移サイクル中の頂点に割り当てる

命題２． 命題１を証明するプロフィールの部分集合が存在し，それを図１の立方体中のランキングを表す６頂点に１対１対応させることができる．

実際，図１の位相を逆時計周りに２つ分ずらして重ね合わせる．すると，１人目と２人目のランキングが，つねに一つのペアでのみ合意している６つのプロフィールからなる集合Ｖを選ぶことができるが，２人３代替案の場合，これだけで命題１を証明できる．

定義． ２人３代替案のプロフィール部分集合$V \subseteq \Sigma \times \Sigma$を以下のように定義する．$V = \{v(k) \mid k = 1, 2, \cdots, 6\}$，

v（1）＝（+−−，−−+），

v（2）＝（++−，+−+），

v（3）＝（−+−，+−−），

v（4）＝（−++，++−），

v（5）＝（−−+，−+−），

v（6）＝（+−+，−++）．

N＝２の場合，この６つのプロフィール部分集合（あるいはその左右をすべて入れ替えたも

の）だけで，独裁者の存在を示すことができる．

まず，頂点集合Ｖはすべての代替案ペアに対して（そのペアにかんして制限された）プロフィールの可能な向き付けをすべて含むことに注意せよ（それぞれ合意が各１回，対立が各２回，計６回である．読者はこれを確かめられよ）．集計されたランキングを各頂点に対応するプロフィールｖ（ｋ），ｋ＝１，２，･･･，６に対して割り当てると，条件４（独立性）によって，その値は全プロフィールに伝播する．それゆえもしＶ上で割り当てした集計ランキングが，３ペアに対してつねに同じ一個人のそれと一致することが示されれば，独裁者を示せる．

一方，Ｖの内部での伝播は先に見た遷移サイクルに沿って進む．その様子を図３に示した．図３の縦方向の各列は，各頂点ｖ（ｋ）をｋ＝４，５，６，１，２，３の順に表示している．例えば，左端列はｖ（４）＝（－＋＋，＋＋－），その右隣はｖ（５）＝（－－＋，－＋－）である．下側の３つの小さな表は，その頂点を各代替案ペアに対して分解し再表示したものである．ただし立方体内部の球をその付近の頂点に，また小さい表の行や列の見出しにある＞と＜を＋とーにそれぞれ読み替えて頂きたい．

記号Ｐで書かれた箇所は条件３（パレート条件）によって向き付けが決定されるペア，また同じ頂点（縦の列内）では，推移性の条件によって，それ以外に同じ向きが一つのペアに与えられると，残りのペアは異なる向き付けでなければならない．水平方向の矢印は，条件４による伝播である．例えばｖ（１）とｖ（２）の間では，さて集計されたランキングを各頂点に割り当てる

各ペアの表について，４つのセルがあり，矛盾なくそのすべての向き付けが完成すると，一つのＳＷＦが得られる．図３は左端の頂点ｖ（４）のペア(a，b)に＋を割り当てると，個人２の独裁的ＳＷＦを得ることを示している．また図３のどの頂点から始めても，同じ伝播経路を辿って個人２が独裁者になることは，明らかであろう．同様に，図４は右端の頂点ｖ（３）から始めて逆方向に伝播する経路を辿りながら，個人１の独裁性が導かれる．

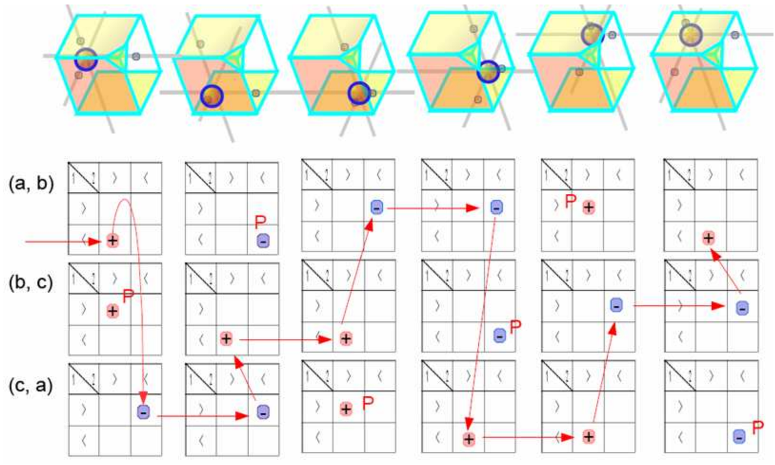

図３．最小プロフィール集合Ｖ内で個人２の独裁が導かれる様子：各列（縦方向）は左から順に，頂点ｖ（ｋ），ｋ＝４，５，６，１，２，３に対応するプロフィールを示す．

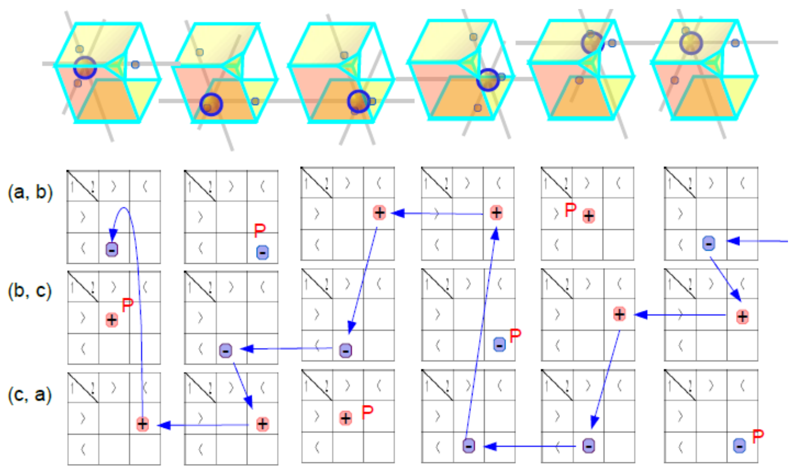

図４．最小プロフィール集合Ｖ内で個人１の独裁が導かれる様子

各ペアの表の４つのセルを，すべて矛盾なく向き付けできなければ一つのＳＷＦの値割り当ては完成しない．また同じ位置に異なる向き付けをすることはできない．したがって上記２通り以外の割り当て方はありえない．■

こうして命題１の２人３代替案の場合について証明できた．アロー自身の証明の前半部分を注意深く読むと，図３や図４と同じように隣接頂点間をリンクしていることが分かるだろう．

５．集合Ｖの最小性

集合Ｖが次の意味で最小であることを命題３として述べる．すなわち，立方体Ｖとその個人の位置を入れ替えて得られる立方体Wは，いずれも命題１を証明するに十分なプロフィール部分集合であるが，それらの両者からともに一つ以上の頂点が欠けてしまうと，命題１はもはや成立しない．[ii]一方，すべてのペアでランキングが完全に一致しているプロフィール６個にかんしては，それらを用いている文献もあるが，各ペアについて合意するプロフィールがＶ中に含まれているので，命題１の証明のために必須ではない．

命題３．立方体Ｖとその両個人の位置を入れ替えて得られる立方体の両者からともに一つ以上の頂点を切除した場合，条件１～４を同時に満たすような集計ランキングを各頂点に割り当てることが可能である．また（独裁的ＳＷＦを除くと）その最小数は１，最大数は１８である．

筆者はPROLOGでプログラムを作成し，実際に命題３のパタンを全て調べた．しかし紙幅のため，その証明は別の機会に譲る．また同じ立方体を用いたＳＷＦの表現を用いて，タイ（無差別）を許す場合については，中間的な６頂点および原点（すべて無差別）を追加すると命題１の証明を得る[3]．これについては付録に実験結果をつけた．

６．より一般的な場合について

３人３案以上の場合についての証明は，すでに述べた２人３案の場合の集合Ｖを若干拡張することによって完成する．任意の人数を，２つのグループ（とくに１人と残り全員）に分割し，各グループ内で合意するプロフィールのみを考えることによって，２人の場合に帰着させる方法は，集合Ｖ内の決定力伝播と共に，アロー自身による証明をはじめ，多くの文献で証明の方針として採用されている．つまり，この擬制２人社会で決定力をもつ個人に相当するグループを，ラテン方格とその下での投票パラドックスを用いてより細かいグループへと分割しながら同様の結果を示し，１個人からなるグループに必ず到達することを示すのである（［1］ p. 100）．詳しくは後で説明するが，本当は，この逆，より正確に言うと決定力集合の単調性の証明も必要である．４案以上の場合は，任意の 3 案について成り立つことが必要十分条件である．それゆえ，一般性を失うことなく，３人３代替案の場合について証明できれば十分である．まず以下の２つの観察された事実を述べる．

観察１．例１において，３人の会議参加者がいて，１人目，２人目，３人目がそれぞれ abc, cab，acb を主張したとする．このとき，全体のランキングはこの３通りの個人のランキングのうちのいずれか一つに定まる．

このことは以下のようにして分かる．各案ペアにかんして，ab は全会一致である．したがってSWF（例１では会議スケジューラー）は条件３にしたがい，ab を採用しなければならない．ここで，グループ全体のランキングは bc と ca のうち，いずれか一方に決まることに注意する．なぜならばab の採用後，仮に bc を採れば，条件２によって abc がグループ全体のランキングに決まり，一方 ca を採れば同様に cab に決まるからである．それゆえ残る可能性は cb と ac を同時に選ぶことである．この場合，条件２によって acb が全体のランキングになる．以上のこ

とから，観察１における全体のランキングは abc，cab，acb の３通りのうちのいずれか一つに定まることが分かった．

図１の図法を用いて，観察１の意味を直観的に説明してみよう．最初の２人までのランキングのペア，（abc，cab）は立方体 V の頂点ｖ（２）に相当する．またこれに３人目として，acb の逆順，bca を追加すると，ラテン方格が得られる．他の頂点を選んでも，同様のプロフィールを作ることができる．

観察２． ３人のうち２人のランキングが完全に一致しているプロフィールで，その合意している２人を１個人に見立てたとき，集合 V に対応しているものを集める．これは３６プロフィールある．これに加えて，観察２に示したプロフィール（abc，cab，acb）と，その人の位置をシフトした（acb，abc，cab）と（cab，acb，abc）の計３通りのプロフィールを作る．最後にラテン方格から一つを選択し，追加してできたプロフィールの集合上では，すべてのペアの SWF 値が定まり，また条件２から条件４をすべて満たすのは独裁制のみである．

筆者は PROLOG プログラムによる自動証明を用いて上で述べた事実を確認した．その実験についての詳細は別の機会に報告したい．なお，予め指摘しておいたように，文献によっては立方体 V とラテン方格にそれぞれ相当するプロフィールだけから独裁制を導いている証明が見受けられる．この場合，ラテン方格追加の効果は，コンドルセルール（つまり対毎の多数決による決定）および少数決を消去することのみである．

一方，観察１で述べたプロフィールを追加しなかった場合，独裁以外に３通りの（条件１を外した）制限領域上の SWF が存在する．より具体的に言うと，全員一致の場合を除き，ある一人だけがつねに決定力集合から除外されるという社会的決定のルールが条件１を除く SWF の条件をすべて満たしている．このルールは，ある個人が単独で決定力を有する場合でも，その除外者とペアにされたときは決定力を失うという意味において，単調ではない．言い換えれば不可能性定理の証明では，決定性集合の単調性をきちんと示す必要があるわけである．[iii]

それゆえに以下のような推測が成り立つ．

推測．3 人の場合（あるいはそれ以上の一般 n 人の場合），命題 1 の証明についての幾何学的意味は，3 つ（あるいは $2^{n-1}-1$ 個）の環（遷移サイクル）が 3 つ（あるいは $2^{n-1}-1$ 個）のジョイントを介して互いに交わるとき，単一方向（時計方向）に巻けるのは一つの環のみである．

参考文献

[1] Arrow, K., *Social Choice and Individual Values*, Yale University Press, 1963.

[2] Indo, K., A cube representation of social welfare function on weak ordering, 2008.
http://www.xkindo.net/cog_dec/wp/cube_swf_1_5.pdf

[3] Indo, K., Profile sequence formation in the Social Choice Logic Programming, 2008.
http://www.xkindo.net/cog_dec/wp/my08c.pdf

付録　2人3代替案弱順序における最小プロフィール集合：PROLOGによる自動証明

以下の実験結果はSWI-Prolog (version 5.6.52) for MS WindowsをインストールしたPC上で、筆者の作成したSCLPツールキットのうち，gprf06tとcswf08.pl をロードして実行した．なおSWI-Prolog はURL: http://wwww.swi-prolog.org) から、またSCLPツールキットはURL: http://wwww.xkindo.net/cog_dec/mplsc.html からそれぞれダウンロードできる．

```
?- chdom(_->t:_).
?- chdpm(_->2), chcube(_->4), L=[
[[-, +, 0], [+, 0, -]], [[-, +, +], [+, +, -]],
[[-, 0, +], [0, +, -]], [[-, -, +], [-, +, -]],
[[0, -, +], [-, +, 0]], [[+, -, +], [-, +, +]],
[[+, -, 0], [-, 0, +]], [[+, -, -], [-, -, +]],
[[+, 0, -], [0, -, +]], [[+, +, -], [+, -, +]],
[[0, +, -], [+, -, 0]], [[-, +, -], [+, -, -]]
],assert(wmc(L)).
?- wmc(M),rr_zero(Z),swf(F,[Z|M],arrow),display_swf_t6(F,s),fail.
[0, 0]->[ (a, b):[0], (b, c):[0], (c, a):[0]]
[0, +]->[ (a, b):[0], (b, c):[0], (c, a):[0]]
[0, -]->[ (a, b):[0], (b, c):[0], (c, a):[0]]
[+, 0]->[ (a, b):[+], (b, c):[+], (c, a):[+]]
[+, +]->[ (a, b):[+], (b, c):[+], (c, a):[+]]
[+, -]->[ (a, b):[+], (b, c):[+], (c, a):[+]]
[-, 0]->[ (a, b):[-], (b, c):[-], (c, a):[-]]
[-, +]->[ (a, b):[-], (b, c):[-], (c, a):[-]]
[-, -]->[ (a, b):[-], (b, c):[-], (c, a):[-]]
---end of swf ---
[0, 0]->[ (a, b):[0], (b, c):[0], (c, a):[0]]
[0, +]->[ (a, b):[+], (b, c):[+], (c, a):[+]]
[0, -]->[ (a, b):[-], (b, c):[-], (c, a):[-]]
[+, 0]->[ (a, b):[0], (b, c):[0], (c, a):[0]]
[+, +]->[ (a, b):[+], (b, c):[+], (c, a):[+]]
[+, -]->[ (a, b):[-], (b, c):[-], (c, a):[-]]
[-, 0]->[ (a, b):[0], (b, c):[0], (c, a):[0]]
[-, +]->[ (a, b):[+], (b, c):[+], (c, a):[+]]
[-, -]->[ (a, b):[-], (b, c):[-], (c, a):[-]]
---end of swf ---
fail.
```

i　本論文は関東学園大学経済学紀要第 34 週第 2 号 pp. 57-65（2009 年 3 月）に掲載された拙稿の校正イメージである（投稿 2008 年 10 月 10 日，最終修正 2009 年 4 月 1 日）ただし命題 3 にかんしては脚注 ii で補足した．また脚注 iii を追加した．

ii　命題 1 を覆すペアは以下の方法で選択的に取り除かねばならない．図 2 のプロフィール v(k) に対して，u(j) を遷移サイクル中で同じか隣接する(k, j)のペアとする．また集合 V か集合 U のいずれか一方を完全に除去した後では，他方が完全に残らない限り命題 1 は成りしない．

iii　[1]などの文献における証明では，決定性が準決定性から導かれるることを示すことによってこれらの非単調な集約ルールの可能性を間接的に排除していることに注意する．（ある代替案ペアについて）それぞれ，決定性は他のメンバーの主張がいかなるものであったとしてもそのサブグループ内で同意すれば，また準決定性は他の全員が反対したときそのサブグループ内で合意すれば，その社会的ランキングを決められることを意味する．