曖昧信念の下でのゲーム理論をモデリングする

Modeling Game Theory under Ambiguous Beliefs

犬　童　健　良
関東学園大学経済学部経営学科

要旨：　曖昧信念下の意思決定とゲームの理論をモデリングするための実験システムを紹介した。筆者は Prolog を用い、信念関数（BEL）、ショケ期待効用（CEU）、不確実性下のナッシュ均衡（NEUU）を統合した３階層モデリングを実現するためのモデルベースシステムを開発した。またこのシステムは対話的インタフェースを通じてシミュレーションによる実験と分析を支援する。

Abstract:　This paper presented an experimental system for modeling the theory of decisions and games under ambiguous beliefs. It can be stated as the three-layer modeling of a decision maker who has ambiguous beliefs represented by the belief functions (BEL), will maximize the Choquet expected utility (CEU), and to play the Nash equilibrium under uncertainty (NEUU). By using Prolog, the author has developed the model base system which realizes the three-layer modeling approximately and guides the users through the simulation and analysis interactively.

1.　はじめに

近年ゲーム理論とナッシュ均衡は、曖昧信念の下での意思決定論を取り入れた戦略的相互作用分析へと一般化された。これは信念、意思決定、ゲームの各システムが統合された３階層のモデリングであり、またそれぞれが不完全な知識、限界合理性、信頼のモデリングを提供するものとみなせる。一方、数学的にいうと意思決定分野に広く応用される実数値集合関数の応用であり、エレガントだが、手計算は煩わしい。そこで、分析者ないし学習者が、モデリングを行うのを支援し、さらなる洞察を得るようなツールを開発したいと私は考えた。

筆者はこの３階層モデリングを近似的に扱う実験システム（プレイヤーは３人まで）を開発した。開発に用いた Prolog 言語は、モデル記述とシミュレーション実験基盤が一体となって使える利点がある。文献の例題をモデルベースに格納し、上記の各階層内の共通モデルクラスを具象化するために用いた。また実験用スクリプトにより、信念や均衡の生成実験と分析を半自動化した。

以降の部分では、まず第２節で曖昧信念とその意思決定とゲーム理論への応用を手短に紹介し、またコンピュータを利用したゲームモデリングの利点に言及する。第３節で、本実験システムの構成と開発経緯を述べる。第４節と第５節で、それぞれ３階層モデリングの理論とシミュレーションの実例を紹介する。第６節で計算量・認知的負荷への対処について述べる。最後に第７節でまとめを述べる。

2.　曖昧信念とゲーム理論のモデリング

ゲーム理論は、今日の経済学・経営情報科学の諸分野に応用されている。これはリスクの下での合理的選択を説明する期待効用（EU）理論とセットになっている。N 人有限標準形ゲームにおいて、各プレイヤーが確率化された行動（混合戦略）を選べるとすれば、ナッシュ均衡の存在定理が証明される。ナッシュ均衡とは最適反応、つまり互いが用いる確率の下での EU 最大化行動の組である。

ところで EU モデルは、心理学的実験などを通じて長年批判にさらされた。例えば共通の賞金額の追加削除によって、多くの人々のギャンブル比較における選択が逆転した（Allais の背理）。また人々は未知の確率を、等確率と同じとは思わず、それを嫌うこと、好むこと、いずれもある（Ellsberg の背理）。こうした共通結果効果や曖昧性回避/追及は、EU や確率論と矛盾する。他にもいわゆるアノマリーは多く知られ、またさまざまな代替理論が提案された。おそらく最もよく研究されたのは、ショケ期待効用（CEU）(Schmeidler, 1989)とマキシミン期待効用（MEU）(Gilboa and Schmeidler, 1989)ではないだろうか。Dow and Werlang(1994)は、これをゲーム理論に取り入れ、不確実性下のナッシュ均衡（NEUU）ないし信念内均衡(equilibrium in beliefs)を提案した。これは２人ゲームだったが、N 人への拡張は Eichberger and Kelsey(2000)による。

NEUU では、確率の代わりに非加法的確率ないし信念関数（BEL）によって基礎となる不確実性を、また CEU によって曖昧性回避をそれぞれモデリングする。多重確率（MP）と MEU をこれらに代わり用いる手法も提案された(Lo, 1996)。NEUU では、曖昧性回避により、より安全なオプションが選ばれるが、それは必ずしもナッシュ戦略でない。例えば Dow and Werlang の有限繰り返し囚人ジレンマゲームの例（本実験システムでのモデル名 ipd2)では、ナッシュ均衡では生じない協調的行動が導かれる。

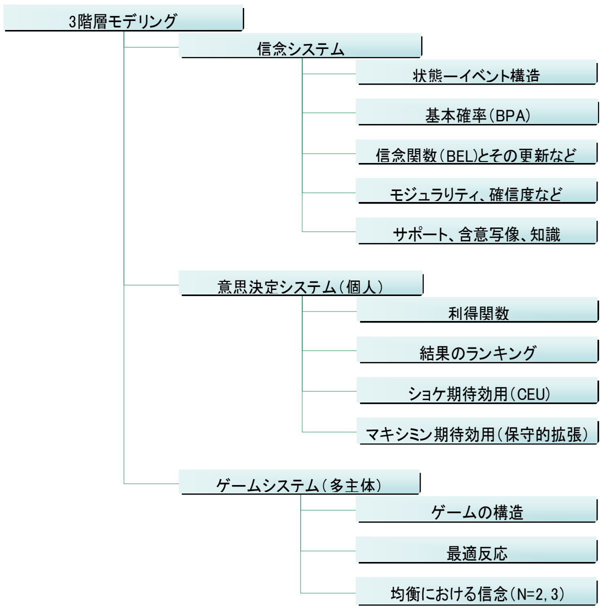

図1. 3階層モデリング

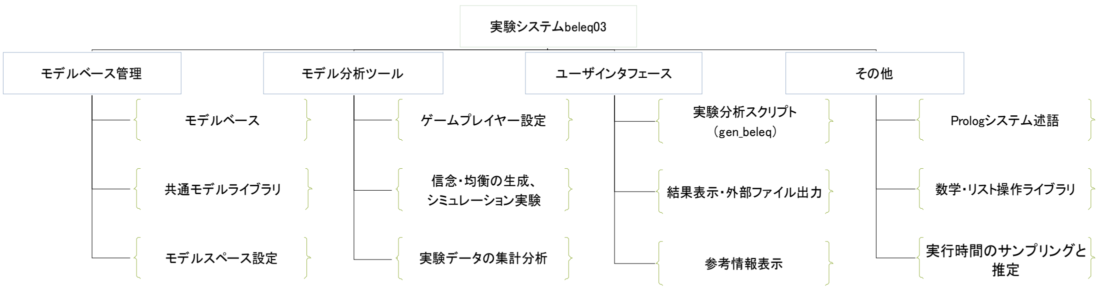

図２．実験システムbeleq03の構成

ゲームモデリングにおけるコンピュータの役割

さて、ゲーム理論におけるコンピュータ利用にはいくつかの互いに補い合う用途が考えうるが、以下では３点をあげておく。

- ゲームの解を計算する実用的方法
- シミュレーションと視覚化
- 意思決定のロジックの厳密なモデリング

最初のものは線形計画法の登場に始まり、最近のホモトピー法まで研究が続いている。第２の用途はたんに均衡点を求めるだけでなく、動学的プロセスを視覚化する。例えば表計算を用いて、2×2ゲームにおける連続写像の不動点（＝ナッシュ均衡）やアトラクタ、強化学習の軌跡、動学的複占ゲームにおけるカオスの発生などを実際に「見る」ことができる（筆者のホームページ(犬童, 2004)を参照）。

これらはコンピュータによる反復計算やグラフィックス機能を活用するものであった。これに対してPrologに代表される論理プログラミングでは､以下に紹介するように、意思決定者の相互認識に踏み込んだ厳密なモデリングやシミュレーション実験が可能である。これにより理論検証、学習、より現実的な意思決定システムのプロトタイピング等に役立つと思われる。

3.　実験システムの構成と開発経緯など

本実験システムは、曖昧信念下のゲーム理論における３階層のモデリングを支援する（図１参照）。

(1)　信念関数（BEL）と基本確率(BPA）による曖昧信念・不完全な知識のモデリング、
(2)　ショケ期待効用（CEU）の最大化に基づく意思決定・限界合理性のモデリング、および
(3)　不確実性下のゲーム理論とその解（NEUU）・信頼の近似的モデリング

各モデリングの内容については後で説明する。本実験システムは標準的なProlog言語によってコーディングされた小さな規範的エキスパートシステムないしモデルベースシステムである。また、その論理的構成はモデルベース管理ツール、シミュレーションによるモデル分析ツール、分析支援用スクリプトなどのユーザインタフェース、およびその他の共通プログラムから成り立つ（図２参照）。

ソースコード（beleq03.pl）は説明やデモなどのコメントを含めて8000行弱、ノートPC（TM5800 993MHz, 232MB RAM, Windows XP）上でSWI-Prolog 5.0.9から読み込みコンパイルすると、365,592 bytesになる。ゲーム理論の部分の開発期間は、試作版を含め、約２ヶ月間（2004/1/14—3/18）であった。開発履歴等はソースファイル内に記載し、ホームページで公開した(Indo, 2004)。ただし下位２階層は、既存コードを一部修正して再利用している。信念関数の部分（belief0, 1100行程度, 28,544 bytes, 2003/3/1）は、昨春本大会で報告し、またショケ期待効用の部分（belief01, 1400行程度, 36,292 bytes, 2003/6/29）はその後に拡張した。

4.　3階層モデリング

- 信念システム（第１層）

まず、意思決定者が直面する状況とその信念システムをモデリングする。数学的には、代数（＝全状態Ωの部分集合であるイベントE⊆Ωとその演算⊆、∪、∩、^{c}）上に定義される非加法的確率測度：

$$v(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$

を用いる。ここでｍ（A）は基本確率(BPA)ないしマス(mass)と呼ばれ､空集合に対してｍ（ϕ）=0となるイベントの集合上の加法的確率である。ｖは0-1正規化済完全単調容量となるが、信念関数とも呼ばれる(Shafer, 1976)。本論文では以降､BELと略記する。また$1-v(A^c)$は可能性関数（POS）である。したがって基本モデルとしては、状態とイベント、BPA､BEL､POS､およびそれらの更新ルール（条件付け）がある。またBELからBPAを逆算するいわゆる反転公式､非加法性（優/劣モジュラ性）の判定を含む｡例えば、優モジュラ性（2-単調性､凸性）は､次の条件をいう。

$$v(A \cup B) + v(A \cap B) \geqq v(A) + v(B).$$

さらにサポートや確信度・曖昧性の両指標が、ゲーム分析において必要とされるが、後述する。

- 意思決定システム（第２層）

ある行為に対して各A_k（k=1, ..., m）をそのｋ番目の可能な結果に対応するイベント、u_k はその効用、また$u_1 \geqq \cdots \geqq u_m$のようにランキングされるものとする。このときショケ期待効用（CEU）は、凸容量、ただし本モデリングでは信念関数と考えてよい――にかんするショケ積分

$$\int f dv = \sum_{k \in M} [v(\cup_{j \leqq k} A_j) - v(\cup_{j < k} A_j)] u_k$$

として定義される｡ただし$A_0 = \phi$、$v(\phi) = 0$　とする。

またCEUはそれと等しいマクシミン期待効用

（MEU）を作ることによって、直観的に意味付けできる（Gilboa and Schmeidler(1994)の Mean of Min & Min of Mean 定理、ないし保守的拡張）。

$$\int f dv = \sum_{B \subseteq \Omega} m(B)\,[\min_{\omega \in B} f(\omega)]$$

$$= \min_{p \in Core(v)} \sum_{\omega \in \Omega} p(\{\omega\})\, f(\omega).$$

すなわち信念関数によって特定イベントにコミットした（割り当て済み）流量以外の自由流量を、そのイベント内のできるだけ悪い結果に割り当てて作った加法的確率の下での、すなわちその容量の「コア」内で最悪の、期待利得である。

● ゲームシステム（第３層）

まず各自の信念 $(v_i)_{i \in I}$ を、自分以外の全プレイヤーの用いる純粋戦略の組を予想した信念関数ないし凸容量で表わすものとする。次に各自の信念に対する CEU 最大化行動、つまり最適反応を $R_j(v_j)$ と書くことにする。プレイヤーの信念の組が NEUU であるというのは、

$$^{\exists}SUPP(v_i) \subseteq X_{j \neq i} R_j(v_j) \quad \forall i \in I$$

を満たすとき、すなわち少なくとも１つのサポートがあって、その要素は必ず自分を除く全員 I-{i}の最適反応の積 $X_{j \neq i} R_j$ に含まれる。認識論的にはプレイヤーはそのサポートを含むイベントを「知っている。」それゆえ上は最適反応が相互知識であることを意味する。ただし、ここでいうサポートの定義は $E = SUPP(v) \subseteq \Omega$, $v(E^C) = 0$, $F^C \subseteq E^C$, $F \neq E \Rightarrow v(F^C) > 0$ である。v の単調性に注意すると、サポートとは、その補集合がメジャー 0、例えば Ω は自明だが、そのうち最小（極小）のイベントである。

5. モデリングとシミュレーションの実際

本実験システムにはモデルベース(model_base/3)中に文献の例題を予め格納した。分析するモデルをユーザが選ぶと、システムは、モデルスペースを再設定する。

モデルスペースは、各モデリング階層内の共通モデルクラスに属する述語（states/1, event/1, bel0/2, bpa0/2, payoff0, game/4）とその他のモデルベース固有の述語からなる。モデルベースにはそれ自身が使う共通モデルクラスの情報を属性として含み、これを参照してモデルを具象化する。

また、シミュレーション実験と事後分析を円滑に行うためのスクリプト gen_beleq/0 が用意されている。これは多肢選択メニューを持ち、図２で示した各種システムリソースの使用を仲介し、図１で示された３層モデリングをユーザが行うことを支援する。すなわち、モデルの選択、信念と均衡の生成実験、確信度や曖昧性の指標によるフィルタリング、集計と事後分析、実験データの外部ファイル出力といった一連の分析を対話的にガイドする。均衡生成実験では、プレイヤーごとにモデルスペースを設定し直し、信念（bpa0/2）を決められた精度とイベント内で生成、そのサポート、CEU 最大化行動、および確信度・曖昧性の両指標を求め、記録する（temp_ceu_max_play/4）。NEUU は均衡条件を満たす CEU 最大化行動とそのサポートの直積である。実験データは分類、区間集計される（図３参照）。

図３に示す実験例は、モデルベース中の２ｘ２標準形ゲーム prudence (Dow and Werlang の図 2)の 20 区間近似 NEUU 生成である。

モデルベースの例 (prudence, a=1, e=2)

```
model:prudence
states([f, c])
bel0([], 0)
bel0([f], 0.3)
bel0([c], 0.7)
bel0([f, c], 1)
act(f)
act(c)
payoff0(f, f, 8)
payoff0(f, c, 8)
payoff0(c, c, 10)
payoff0(c, f, -10)
game(prudence, parameter, payoff(a), 1)
game(prudence, parameter, payoff(e), 2)
game(prudence, payoff, [c, c], [10, 10])
game(prudence, payoff, [f, f], [8, 9])
game(prudence, payoff, [c, f], [-10, 9])
game(prudence, payoff, [f, c], [8, 10])
```

```
%          f         c
%       +--------+--------+
%       | 10-e   | 10-e   |
%   f   | 10-a   |  10    |
%       +--------+--------+
%       |  -10   |  10    |
%   c   | 10-a   |  10    |
%       +--------+--------+
% Fig. prudence game.
```

CEU の計算例

```
?- payoff(choquet(A),B,C).

A = f
B = [[c, f], [8, 0], [8* (1-0), 0]]
C = 8 ;

A = c
B = [[c, f], [-10, 10, 0], [-10* (1-0.7), 10* (0.7-
0), 0]]
C = 4.0 ;

No
```

実験結果（スクリプト gen_beleq）

```
model:prudence
number of bpa intervals:20
restricted events for generating positive-valued
bpas:non

filters on belief indices:
 confidence:[0, 1]
 ambiguity:[0, 1]

[1]
acts:[[f], [c]]
supports:
% player(1):[[c]]
% player(2):[[f]]
equilibrium belief(bpa)s and their intervals:
% player(1):[[c]]:[[0, 0.85]]
% player(2):[[f]]:[[0, 1]]
confidences:
% player(1):[0, 0.85]
% player(2):[0, 1]
```

← 確信度(confidence)が 0.9 未満のとき、([f], [c])だけが最適反応集合組になる。

```
ambiguities:
% player(1):[0.15, 1]
% player(2):[0, 1]
[2]
acts:[[c, f], [c]]
supports:
% player(1):[[c]]
% player(2):[[c]]
% player(2):[[c], [f]]
% player(2):[[f]]
equilibrium belief(bpa)s and their intervals:
% player(1):[[c]]:[[0.9, 0.9]]
% player(2):[[c]]:[[0, 1]]
% player(2):[[f]]:[[0, 1]]
confidences:
% player(1):[0.9, 0.9]
% player(2):[0, 1]
ambiguities:
% player(1):[0.1, 0.1]
% player(2):[0, 1]
[3]
acts:[[c], [c]]
supports:
% player(1):[[c]]
% player(2):[[c]]
equilibrium belief(bpa)s and their intervals:
% player(1):[[c]]:[[0.95, 1]]
% player(2):[[c]]:[[0, 1]]
confidences:
% player(1):[0.95, 1]
% player(2):[0, 1]
ambiguities:
% player(1):[0, 0.05]
% player(2):[0, 1]
```

図３．モデルベースと均衡生成実験結果の例

```
condition_of_equilibrium_in_beliefs_2(J,S,SP,R,yes):-
   member(SP,S), % S: the set of supports of player J.
   forall( member(X,SP), product_of_lists([R],X) ).
condition_of_equilibrium_in_beliefs_2(_,_,_,_,no).

equilibria_in_beliefs_2([P1,P2],R,Y):-
   R=[R1,R2],
   Y=[yes,yes],
   setof((BP1,SB1),temp_ceu_max_play(1,BP1,SB1,R1),Q1),
   setof((BP2,SB2),temp_ceu_max_play(2,BP2,SB2,R2),Q2),
   setof((BP1,S1,SP1),
    (
     member((BP1,S1),Q1),
     condition_of_equilibrium_in_beliefs_2(1,S1,SP1,R2,yes)
    ),
   P1),
   setof((BP2,S2,SP2),
    (
     member((BP2,S2),Q2),
     condition_of_equilibrium_in_beliefs_2(2,S2,SP2,R1,yes)
    ),
   P2).
```

図４．２人ゲームの均衡（NEUU)のモデリング

NEUU では、曖昧性回避の度合い強いほど、より安全なオプションが選ばれる傾向がある。この性質を利用して、次のように定義される確信度と曖昧性の両指標によって均衡集合をフィルタリングできる(Eichberger and Kelsey, 2000)。

confidence= max $_{E\neq\phi,\Omega}$ { v(E)+v(E^C) },

ambiguity = max $_{E\neq\phi,\Omega}$ {1- v(E)-v(E^C)}.

本システムでは均衡生成のフィルターとして、両指標の上下限を設定できるようにした。図３では、フィルターは用いず、デフォルトでともに[0,1]である。しかし、もし確信度が 0.9 未満であるならば、パタン[1]の ([f], [c])だけが NEUU の最適反応集合の組であるのは明らかだろう。列（プレイヤー 2、利得下段）の c は支配戦略なので、もし確信がもてれば問題なく、行（プレイヤー１、利得上段）は c を選ぶところであるにもかかわらず、相手の合理性を信じきれないわけである。

6. 計算複雑性への対処

曖昧信念やゲーム理論を素朴にモデリングすると、小規模モデルでも計算量が手に負えなくなる。そこで以下のような工夫を行った。

(1) ローカルモデルと共通モデルクラスの区別

(2) モデルスペースの事実化

(3) イベント入力規則

(4) 均衡信念と指標の区間集計

(5) 均衡信念のラッピング

(6) 計算量予測と知的インタフェース

(1) モデルベースで指定する BPA や BEL の値を bpa0/2,bel0/2 などとし、bpa0 の正値のイベント、すなわち焦点集合(focal elements)のみ記述すれば済む。本来全イベントに対して定義されるが、共通モデルクラスのルール bpa/2, bel/3 および以下の(2)と(3)によって補間し、すべてのイベントに対して完全に定義する。すなわち bpa は bpa0 が失敗すると、メジャー０となる。

(2) 再帰とバックトラックは、Prolog の強みでもあり弱点でもある。例えば bel/3 のような共通モデルクラスは、bpa/2 から再帰的ルールで定義されるが、モデル設定時に事実として具象化する。これにより以降での冗長なバックトラックを防ぐ。

(3) イベント上に定義されるモデルは、入力変数のイベントの束縛/自由に応じ、ルールを使い分ける。イベントは状態のリストとして表されるが、変数のまま生成するときは全状態リストにおける出現順で整列した sevent/1 を用いる。一方、検証では置換されたパタンを許す必要がある。

(4) システムは均衡を分類し、その BPA や指標の値を、近似的に連続する区間に分割して集計表示する。ここでも見易さのため、非自明な焦点集合のみを表示する。例えば図３の均衡パタン[2]ではプレイヤー１は相手２が[f]をプレイしないと信じており、このためその BPA 区間[0,0]は表示されない。

(5) 均衡信念の数は小さな例題でも膨大になりうる。例えば３人ゲーム lo32 では実質２パタンであるが、２区間近似で 44 万通り出力される。ラッピングされた均衡信念では、信念とサポートの集合を setof/3 で収集してリストのまま保ち、最適反応組のみによって均衡を分類する。図４にその２人の場合のモデリングを示す。すなわち直積をばらさず、必要な場合にだけ、梱包を解く。

(6) 信念と均衡の生成実験とモジュラリティ判定では、状態数などの基本統計、組合せの数理から必要に応じてシミュレーション実行時間サンプリングを実行し、実験全体の実行時間を推定、ユーザに対して警告する知的対話ルールを備えた。

7. おわりに

本実験システムでは３人までの標準形ゲームにおける信念関数－ショケ期待効用－不確実性下のナッシュ均衡の３階層モデリングを近似的に実現した。実用的サイズの問題を解くことは目的としなかった。しかしモデルベースが小さな例題であっても、計算量を抑える工夫は不可欠だった。展開形ゲームは、今後に残された。J. Wilemaker 氏とアムステルダムが提供するフリーの処理系 SWI-Prolog を大いに活用した。もちろん理解やプログラムの誤り、説明の不明瞭等は筆者の責任である。ご指摘ご教示頂ければ幸いです。

参考文献

[1] 犬童健良, 意思決定と認知のモデリングとシミュレーション. http://www.us.kanto-gakuen.ac.jp/indo , 2004.

[2] Dow, J. and S.R.C. Werlang, Nash equilibrium under Knightian uncertainty: breaking down backward induction, Journal of Economic Theory, 64:305-324, 1994.

[3] Eichberger, J. and D. Kelsey, Non-additive beliefs and strategic equilibria, Games and Economic Behavior, 30:183-215, 2000.

[4] Gilboa, I. and D. Schmeidler, Maxmin expected utility with non-unique prior, Journal of Mathematical Economics, 18:141-153, 1989.

[5] ______ and ______, Additive representations on nonaddtitive measures, Annals of Operations Research, 52:143-65, 1994.

[6] Lo, K.C., Equilibrium in beliefs under uncertainty, Journal Economic Theory, 71:443-484, 1996.

[7] Schmeidler, D., Subjective probability and expected utility without additivity, Econometrica, 57:571-587, 1989.

[8] Shafer,G., Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, 1976.